Esercizi di affidabilità*

ESERCIZIO 1

Calcolare l'affidabilità complessiva per un tempo di missione di 1 anno e l'*MTBF* (Mean Time Between Failures) del sistema di figura 1.

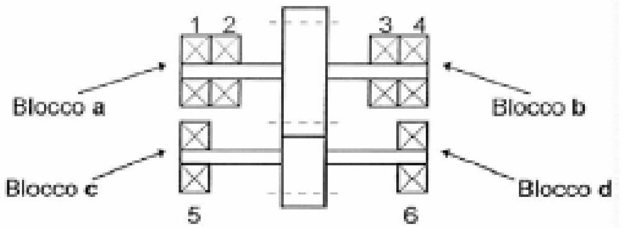


fig.1

Dati:

$\lambda_i = 12 \times 10^{-6} guasti / ora$.

I cuscinetti 1e 2, nonché i cuscinetti 3 e 4, sono in parallelo tra di loro nel senso che, per il funzionamento del sistema è sufficiente che funzioni un solo cuscinetto per ciascuno dei due blocchi.
I blocchi a, b, c e d sono invece in serie tra loro perché, al danneggiarsi di uno di questi, il sistema si guasta.
Il diagramma a blocchi di affidabilità per il sistema in esame è dunque il seguente.

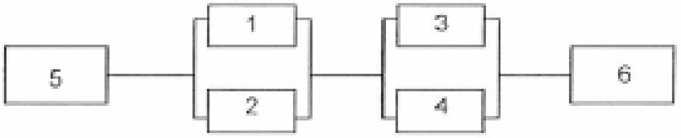


fig.2

* Proposti da P. Morelli (a.a.2000-2001)

Per determinare l'affidabilità del sistema occorre anzitutto ridurre i due blocchi in parallelo. La probabilità di guasto $P_s(t)$ di un sistema costituito da n sottosistemi in parallelo è dato dal prodotto delle probabilità di guasto dei singoli sottosistemi $P_i(t)$:

$$P_s(t) = P_1(t) \cdot P_2(t) \ldots P_n(t) = \prod_{i=1}^{n} P_i(t).$$

Da questa relazione si ricava:

$$R_s(t) = 1 - P_s(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P_i(t)$$

e, per due elementi si ricava:

$$1 - R_s = (1 - R_A) \cdot (1 + R_B)$$

cioè:

$$R_s = R_A + R_B - R_A \cdot R_B$$

che nel caso particolare di tasso di guasto costante e uguale per i due componenti, si ha:

$$R_A = R_B = e^{-\lambda \cdot t}$$

$$R_s(t) = 2 \cdot e^{-\lambda \cdot t} - e^{-2 \cdot \lambda \cdot t} = e^{-\lambda \cdot t} \cdot \left(2 - e^{-\lambda \cdot t}\right).$$

Tornando al sistema in esame, l'affidabilità dei due blocchi in parallelo vale:

$$R_a = R_b = e^{-\lambda_i \cdot t} \cdot \left(2 - e^{-\lambda_i \cdot t}\right) = 0{,}990$$

dove l'affidabilità di un cuscinetto vale:

$R_i = e^{-\lambda_i \cdot t} = 0{,}900$.

Per valutare l'affidabilità dei blocchi in serie si deve usare la relazione:

$R_{s,tot} = \prod_{i=1}^{4} R = R_a \cdot R_b \cdot R_c \cdot R_d = R_a^2 \cdot R_i^2 = 0{,}990^2 \cdot 0{,}900^2 = 0{,}794$.

L' $MTBF$ è dato dalla relazione: $MTBF = \dfrac{1}{\sum_i \left(\dfrac{1}{MTBF_i}\right)}$

ed essendo:

$$MTBF_5 = MTBF_6 = \frac{1}{\lambda_i} = 12500 ore$$

$$MTBF_a = MTBF_b = \frac{3}{2 \cdot \lambda_i} = 83300 ore$$

$MTBF = \dfrac{1}{\left(\dfrac{2}{12500}\right) + \left(\dfrac{2}{83300}\right)} = 25000 ore$.

Il sistema poteva anche essere risolto nel modo seguente:

$$MTBF = \int_0^{\infty} R(t)\cdot \partial t = \int_0^{\infty} R_a \cdot R_b \cdot R_5 \cdot R_6 \cdot \partial t = \int \left(2\cdot e^{-\lambda_i \cdot t} - e^{-2\cdot\lambda_i\cdot t}\right)^2 \cdot e^{-2\cdot\lambda_i\cdot t}\cdot \partial t =$$

$$= \left[-\frac{e^{-\lambda_i \cdot t}}{\lambda_i} - \frac{1}{6\cdot\lambda_i}\cdot e^{-6\cdot\lambda_i\cdot t} + \frac{5}{4\cdot\lambda_i}\cdot e^{-5\cdot\lambda_i\cdot t}\right]_0^{\infty} = \frac{3}{10\cdot\lambda_i}$$

in cui, sostituendo il valore del tasso di guasto i-esimo,

si ottiene: $MTBF = \frac{3}{10\cdot\lambda_i} = \frac{1}{10\cdot 12\times 10^{-6}} = 25000\, ore$

ESERCIZIO 2

Calcolare l'affidabilità complessiva del sistema raffigurato in figura 1 per un tempo di missione di 10 anni noti i valori dei tassi di guasto di tutti i componenti.

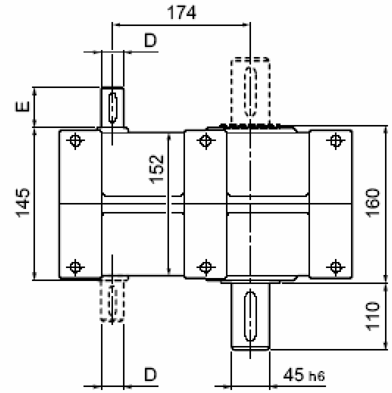


fig.1

Dati:

$\lambda_{ruota1} = 2 \times 10^{-7}\ guasti\ /\ ora$;

$\lambda_{ruota2} = 3 \times 10^{-7}\ guasti\ /\ ora$;

$\lambda_{cuscinetti} = 13 \times 10^{-6}\ guasti\ /\ ora$;

$\lambda_{alberi} = 1 \times 10^{-7}\ guasti\ /\ ora$.

Se anche uno solo di questi componenti si guastasse, il funzionamento dell'intero sistema sarebbe compromesso. Sulla base di questa osservazione si può costruire il diagramma a blocchi di affidabilità che è costituito da 8 blocchi in serie.

cuscinetto	albero	ruota1	cuscinetto	cuscinetto	albero	ruota2	cuscinetto

L'affidabilità del sistema vale:

$$R_s = \prod_{i=1}^{8} R_i(t) = e^{-\sum_{i=1}^{8} \lambda_i \cdot t}$$

ed occorre determinare l'affidabilità dei singoli componenti che, a partire dai ratei di guasto, vale:

$$R_{ruota1} = e^{-\lambda_{ruota1} \cdot t} = 0{,}982$$
$$R_{ruota2} = 0{,}974$$
$$R_{cuscinetti} = 0{,}32$$

$$R_{alberi} = 0{,}991$$

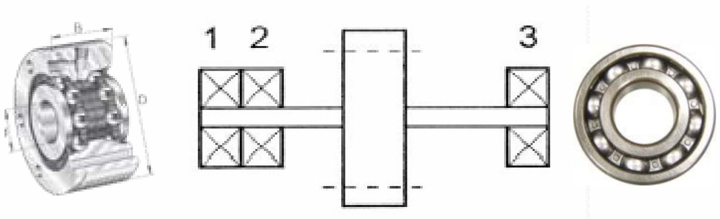
da cui si vede come i componenti più penalizzanti per l'affidabilità siano i cuscinetti. Sostituendo, si ha:

$$R_s = R_{ruota2} \cdot R_{ruota1} \cdot R_{cuscinetti}{}^4 \cdot R_{alberi}{}^2 = 0{,}0098 \cong 0{,}01.$$

Per migliorare l'affidabilità, si potrebbe migliorare l'affidabilità dei cuscinetti (con un aumento del costo), altrimenti si potrebbero introdurre delle ridondanze (anche in questo caso con un aumento del costo).

ESERCIZIO 3

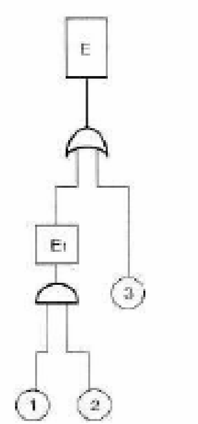
Dato il sistema di figura si disegni l'albero dei guasti e si calcoli l'affidabilità del sistema per un tempo di missione di 1 anno.



Dati:

$\lambda_i = 13 \times 10^{-6}\, guasti\,/\,ora$.

L'albero dei guasti per il sistema in esame risulta il seguente:



dove l'operatore AND equivale al parallelo tra due unità nel senso che il sistema si guasta quando si guastano tutti i componenti. L'affidabilità risultante è la somma delle singole affidabilità meno il relativo prodotto, mentre la probabilità di guasto è il prodotto delle singole probabilità di guasto.

L'operatore OR equivale alla serie di due unità cioè il sistema si guasta quando si guasti un qualsiasi componente.
In tal caso l'affidabilità totale è data dal prodotto delle singole affidabilità mentre la probabilità di guasto è data dalla somma delle singole probabilità di guasto.
L'evento fondamentale (Top Event) è il mancato funzionamento del sistema.

La relazione che permette di determinare l'affidabilità si ottiene percorrendo a ritroso l'albero dei guasti:

$$R_E = R_3 \cdot R_{E1}$$

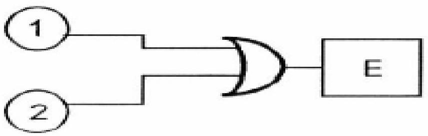
con:

$$R_{E1} = R_1 + R_2 - R_1 \cdot R_2$$

da cui:

$$R_E = R_3 \cdot (R_1 + R_2 - R_1 \cdot R_2) = 0{,}882.$$

Volendo confrontare l'affidabilità del sistema in esame con quella in cui si utilizzino solo due cuscinetti, che nello schema a blocchi saranno in parallelo tra di loro, si ha:



$$R_E = R_1 \cdot R_2 = 0{,}795$$

e l'incremento relativo di affidabilità vale:

$$\frac{0{,}882 - 0{,}795}{0{,}795} = 0{,}108$$

cioè l'adozione di un secondo cuscinetto all'estremità sinistra dell'albero aumenta l'affidabilità del 10,8%.

ESERCIZIO 4

Valutare se è più sicuro volare con un aereo con due motori con affidabilità $R_i = 0{,}8$ e con un anno di vita, oppure con un aereo a quattro motori con affidabilità $R_j = 0{,}8$ sempre con un anno di vita (supponendo che, per garantire condizioni di sicurezza, sia sufficiente avere un solo motore funzionante).

Consideriamo innanzitutto il primo caso. Poiché il danneggiamento di uno dei due motori non compromette la sicurezza dell'aereo, i due motori possono considerarsi in parallelo. Lo schema a blocchi del sistema è riportato in figura 1.

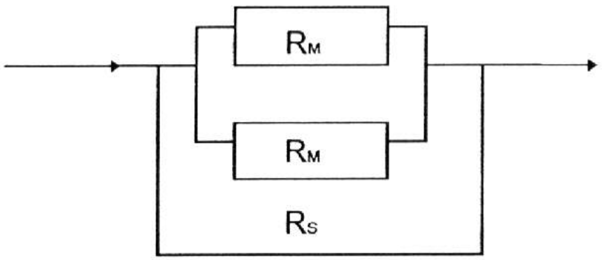


fig.1

L'affidabilità vale:

$R_s = R_A + R_B - R_A \cdot R_B$

dove, nel caso in esame, $R_A = R_B = R_i = 0{,}8$ e si ottiene:

$R_s = 2 \cdot 0{,}8 - 0{,}8^2 = 0{,}96$.

Passiamo ad analizzare il caso dell'aereo a quattro motori che, in questo caso, si devono considerare in ridondanza 3 su 4, secondo lo schema a blocchi riportato in figura 2.

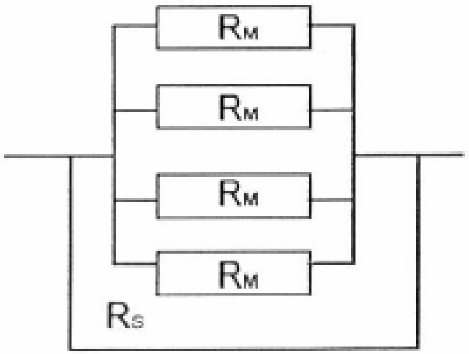


fig.2

L'affidabilità si calcola come segue:

$$R_s = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} R^i (1-R)^{n-i}$$

ed infine si ha:

$$R_s = 4 \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}8^4 = 0{,}819.$$

Dal confronto tra i due valori trovati si vede che la soluzione con due motori con un anno di vita è più affidabile.

Volendo calcolare l'MTBF basta ricordare che per i sistemi a semplice ridondanza a due unità va
la relazione:

$$MTBF = \frac{3}{2 \cdot \lambda}$$

essendo λ il tasso di guasto complessivo del singolo motore calcolabile come:

$$R_s = e^{-\lambda \cdot t} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{t} \cdot ln\, R_s = -\frac{1}{8760} \cdot ln(0{,}8) = 25{,}5 \times 10^{-6}\, guasti / ora$$

(assumendo $t = 1 anno = 8760 ore$).

Sostituendo si ha:

$$MTBF = \frac{3}{2 \cdot \lambda} = 58886 \quad ore$$.

Per il quadrimotore, considerando sempre un periodo di un anno, si può scrivere:

$$MTBF = \int_0^\infty R_s \cdot \delta t$$

dove al posto di R_s si inserisce l'espressione vista precedentemente, cioè:

$$MTBF = \int_0^\infty \left[4 \cdot e^{-3\lambda \cdot t}\left(1 - e^{-\lambda \cdot t}\right) + e^{-4\lambda \cdot t}\right] \delta t$$

e risolvendo l'integrale si ottiene:

$$MTBF = \frac{7}{12 \cdot \lambda} = 22876 \quad ore$$

ESERCIZIO 5

Si consideri un recipiente cilindrico in pressione dotato di fondi emisferici flangiati e serrati tramite l'utilizzo di 4 bulloni disposti simmetricamente sulla flangia stessa.
Per garantire la funzionalità del recipiente e quindi la tenuta sulla flangia, è sufficiente che una singola coppia di bulloni contrapposti sia efficiente.
Si calcoli l'affidabilità del sistema per una durata di missione di 10 anni.

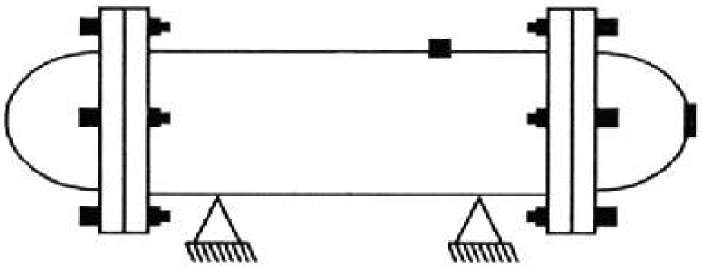


fig.1

Dati:

$MTBF_{bullone} = 1 \times 10^{7}\ ore$.

Dall'esame del sistema si vede che le due coppie di bulloni contrapposti sono tra loro in parallelo, perché per garantire la funzionalità è sufficiente che una di esse sia efficiente.
I bulloni di ciascuna coppia sono tra loro in serie, perché se uno dei due si rompe il funzionamento del sistema è compromesso.
In sostanza il diagramma a blocchi di affidabilità del sistema è quello riportato in figura 2.

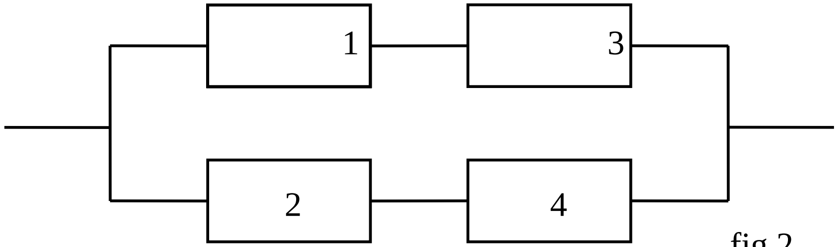


fig.2

L'affidabilità di un bullone vale:

$$R_{bullone} = e^{-\lambda_{bullone} \cdot t} = 0{,}991$$

dove $\lambda_{bullone} = \dfrac{1}{MTBF_{bullone}} = 1 \times 10^{-7}\ guasti/ora$.

L'affidabilità di due bulloni in serie è uguale al prodotto delle affidabilità di ciascun bullone e, nel caso in esame, si ha:

$$R_I = R^2{}_{bullone} = 0{,}982$$

e infine, riducendo il parallelo costituito dalle due coppie di bulloni contrapposti, si ottiene l'affidabilità complessiva del sistema che vale:

$$R_s = (R_I + R_{II} - R_I \cdot R_{II})^2 = 0{,}9994$$

cioè, dopo 10 anni di funzionamento, su 10000 tenute solo 6 non funzioneranno più correttamente.

ESERCIZIO 6

Si consideri la trasmissione di figura 1, in cui si noti la ridondanza dei cuscinetti per l'appoggio del secondo albero.
Si calcoli l'affidabilità della trasmissione per un periodo di funzionamento di 8000 ore.

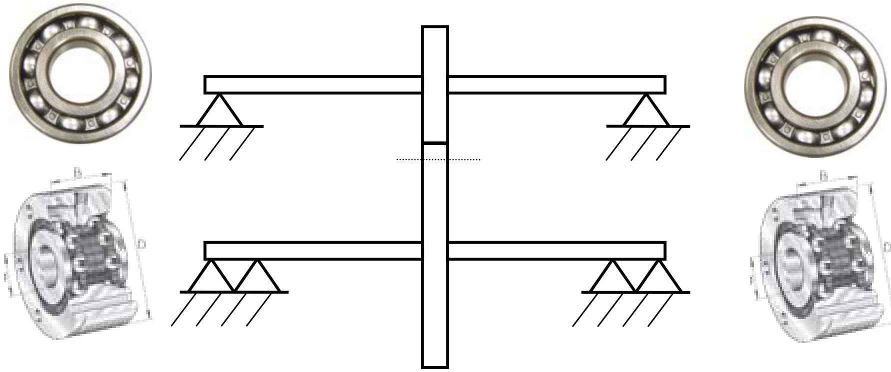


fig.1

Dati:

$MTBF_{cuscinetti} = 15 anni$;

$MTBF_{alberi} = 20 anni$;

$MTBF_{ruote} = 17 anni$.

Considerando ratei di guasto costanti nel tempo dal valore del parametro $MTBF$ dei vari componenti si ricavano i seguenti ratei di guasto:

$$\lambda_{cuscinetti} = \frac{1}{MTBF_{cuscinetti}} = 76 \times 10^{-7}\, guasti / ora$$

$$\lambda_{alberi} = 57 \times 10^{-7}\, guasti / ora$$

$$\lambda_{ruote} = 67 \times 10^{-7}\, guasti / ora.$$

Dall'esame del sistema si vede che tutti i componenti sono in serie tra loro, ad eccezione delle due coppie di cuscinetti per l'appoggio del secondo albero, che sono in parallelo perché se uno di essi si guasta, la trasmissione continua regolarmente.
Il diagramma a blocchi di affidabilità del sistema in esame è quello rappresentato in figura 2.

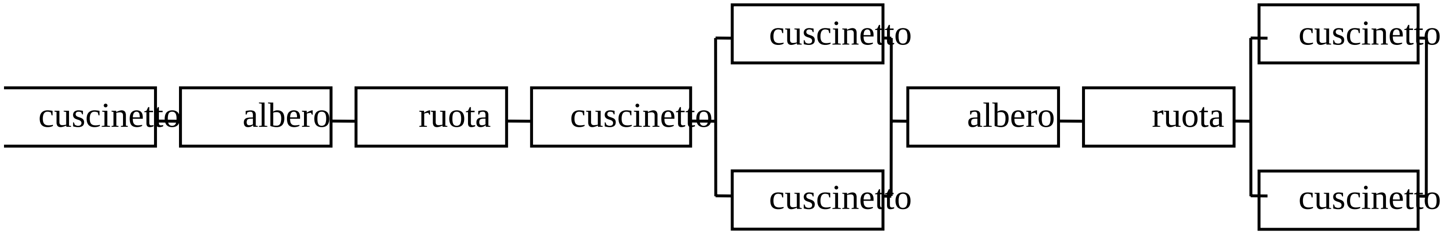


fig.2

Prima di tutto si devono ridurre i due blocchi in parallelo per i quali l'affidabilità è data dal prodotto delle probabilità di guasto dei componenti.
In definitiva l'affidabilità di due cuscinetti in parallelo vale:

$$R_I = 2R_{cuscinetti} - R^2{}_{cuscinetti}$$

e poiché il tasso di guasto costante e uguale per i due componenti:

$$R_{cuscinetti} = e^{-\lambda_{cuscinetti} \cdot t} = 0{,}941$$

si ha:

$$R_I = 2R_{cuscinetti} - R^2{}_{cuscinetti} = 1{,}882 - 0{,}885 = 0{,}997.$$

A questo punto restano 8 blocchi in serie, la cui affidabilità è pari al prodotto delle affidabilità dei singoli componenti, per cui l'affidabilità complessiva del sistema vale:

$$R_s = R^2{}_{cuscinetti} \cdot R^2{}_{ruote} R^2{}_{alberi} \cdot R_I \cdot R_{II} = 0{,}941^2 \cdot 0{,}948^2 \cdot 0{,}955^2 \cdot 0{,}997^2 = 0{,}721.$$